
Modélisation des écoulements dans les sols

Détermination des paramètres hydrodynamiques

Benjamin Belfort *, François Lehmann **

*LHyGeS – Université de Strasbourg / EOST, CNRS
1 rue Blessig - 67084 Strasbourg*

*Université de Strasbourg – IUT Louis Pasteur de Schiltigheim
1 Allée d'Athènes - 67300 Schiltigheim*

** Département Génie Industriel et Maintenance*

*** Département Mesures Physiques*

benjamin.belfort@unistra.fr ; lehmann@unistra.fr

Sections de rattachement : 60

Secteur : Secondaire

RÉSUMÉ. La compréhension des processus d'écoulement et de transport dans les sols constitue une étape déterminante pour gérer les ressources en eau et assurer leur préservation. Au delà de cette compréhension physique, l'établissement de prédictions fiables représente une aide précieuse pour les décideurs, de manière à ce que les actions envisagées soient adaptées à l'évolution de la situation dans le temps. Cette communication présente une approche de modélisation mécaniste des écoulements dans les sols et s'intéresse plus particulièrement à la question des modèles hydrodynamiques caractérisant l'humidité et la conductivité des sols et à la détermination des paramètres associés à ces modèles par méthode inverse.

MOTS-CLÉS : modélisation, sols, écoulements, paramètres hydrodynamiques, méthode inverse.

1 Introduction : enjeux généraux et présentation du domaine d'étude

Avec la pression démographique et la diversification des usages (domestiques, industriels, agricoles, transports,...), les ressources en eau sont soumises à une consommation croissante et à des risques de pollution importants. De ce fait, la gestion des ressources en eau, tant superficielles que souterraines, constitue un enjeu majeur.

Au-delà de la compréhension des processus qui régissent les phénomènes d'écoulement et de transport, dans laquelle elle s'inscrit complètement, la modélisation expérimentale et/ou numérique constitue un outil essentiel de prévision ayant entre autre pour objet de fournir des arguments « scientifiques » d'aide à la décision.

Le sol peut être alors considéré comme un système hétérogène complexe composé de trois phases : la phase solide matérialisée par les particules du sol, la phase liquide constituée notamment par l'eau et la phase gazeuse représentée essentiellement par l'air (Hillel 1988). Lorsque la phase gazeuse est absente de la matrice poreuse, le milieu considéré est dit saturé ; c'est le cas des nappes d'eau souterraines. A proximité de la surface, le sol présente des zones plus ou moins humides assimilées à des milieux poreux non saturés ou variablement saturés (cf. Figure 1). La texture, qui indique les proportions relatives des diverses fractions d'un sol (argile, limons, sables,...) et structure, qui précise la manière dont sont associés les constituants élémentaires, permettent une caractérisation du sol en tant que milieu poreux.

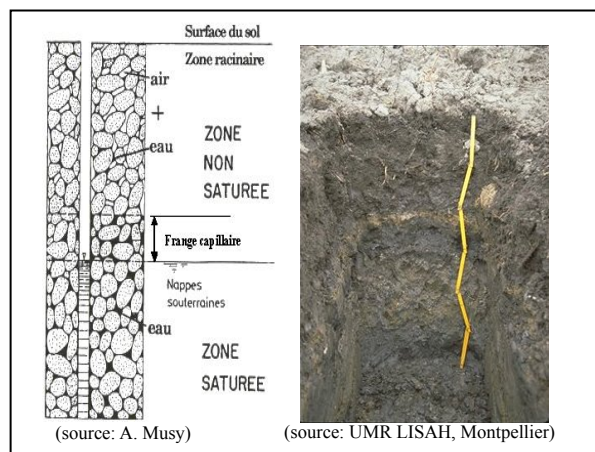


Figure 1 . Exemple de sol et de représentation du milieu poreux associé.

Un certain nombre de paramètres permet de caractériser l'étendue relative de chacune des trois phases constitutives du milieu poreux. La porosité, notée Φ [1], traduit l'importance de l'espace poral où se déroulent les transferts, tandis que l'indice de saturation effective, noté S_e [1], renseigne sur la partie liquide du fluide présent :

$$\Phi = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}} = \frac{V_{\text{pores}}}{V_T} \text{ et } S_e = \frac{\text{Volume de la phase liquide}}{\text{Volume des vides}} = \frac{V_L}{V_{\text{pores}}} \quad [1]$$

D'un point de vue dynamique, dans le cas d'un sol indéformable et d'une eau faiblement compressible, l'état hydrique d'un milieu poreux soumis à des conditions particulières peut être décrit à l'aide de trois variables d'état (Musy et al., 1991) : la teneur en eau θ ($L^3.L^{-3}$) - la charge piézométrique H (L) qui mesure la densité d'énergie potentielle totale associée à θ et permet de déduire la répartition de l'énergie dans le profil - la conductivité hydraulique, K ($L.T^{-1}$), qui caractérise les propriétés hydrodynamiques du sol et mesure l'aptitude de ce dernier à transmettre l'eau.

2 La modélisation des écoulements variablement saturés

2.1 Equation de conservation et problème direct

Du point de vue mécaniste, les écoulements en milieux poreux variablement saturés peuvent être décrits par l'équation de Richards (1931), qui combine l'équation de conservation de la masse [2] :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = f \quad [2]$$

et la loi de Darcy-Buckingham [3] (Narasimhan, 2004) :

$$\mathbf{q} = -K(h) \cdot \nabla H \quad [3]$$

où t désigne le temps (T), \mathbf{q} le vecteur vitesse ($L \cdot T^{-1}$), f le terme puits/sources (T^{-1}), K la conductivité hydraulique fonction de la pression ($L \cdot T^{-1}$), $h = H + z$ la pression du liquide (L) et z la coordonnée lue sur l'axe vertical orienté positivement vers le bas.

La résolution de ce problème mathématique requiert la définition d'un domaine assorti de conditions aux limites H_D (condition de Dirichlet à charge hydraulique imposée) et/ou Q_N (condition de Neuman à flux imposé) sur les frontières, et de conditions initiales H_{init} . Par ailleurs, il convient de définir des relations caractéristiques entre variables d'état en fonction des types de sol rencontrés dans le domaine.

2.2 Les modèles hydrodynamiques caractérisant les sols

La loi de Darcy, modifiée par Buckingham [4], tient compte de l'interdépendance entre les variables d'états h et θ et de leur influence sur la conductivité hydraulique (ou perméabilité). Différents modèles ont été proposés dans la littérature pour décrire la courbe de rétention d'eau, i.e. la relation entre h et θ , et l'évolution de la conductivité hydraulique $K(h)$. L'un des plus utilisés est le modèle de Mualem – van Genuchten (1980).

La saturation effective S_e (-), qui relie h et θ , est définie par l'équation [4],

$$S_e = \begin{cases} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + (\alpha |h|)^n \right]^{-m}, & h < 0 \\ = 1, & h \geq 0 \end{cases} \quad [4]$$

où θ_r représente la teneur en eau à saturation ($L^3 \cdot L^{-3}$), θ_s la teneur en eau résiduelle ($L^3 \cdot L^{-3}$), α un paramètre de forme lié à la taille moyenne des pores (L^{-1}), n un paramètre lié à la distribution des tailles de pores (-) et $m = 1 - 1/n$ (-).

La conductivité hydraulique est caractérisée par l'équation [5] :

$$K(S_e) = K_s S_e^{1/2} \left(1 - (1 - S_e^{1/m})^m\right)^2 \quad [5]$$

avec K_s , la conductivité à saturation ($L.T^{-1}$), S_e donnée par l'équation [4] et $n > 1$.

Pour ce couple de relations [4] et [5], le nombre de paramètres est de 5 par type de sol ($K_s, \theta_s, \theta_r, \alpha, n$). Des tables fournissent la valeur des paramètres pour les différentes classes granulométriques de sols rencontrés (Carsel et al., 1988).

2.3 Les méthodes de résolution numérique

Différentes méthodes numériques peuvent être utilisées pour la discrétisation spatiale des équations [2] et [3]. Les méthodes des différences finies (DF) ou des éléments finis standards (EF) sont depuis quelques années concurrencées par des méthodes de type volumes finis (VF) (Manzini et al., 2004) ou éléments finis mixtes (EFM) (Bergamaschi et al., 1999), qui sont elles-mêmes sujettes à des perfectionnements (Belfort et al., 2005).

Ces méthodes introduisent les inconnus du problème (H et θ) sur les nœuds et/ou les éléments (voire les arrêtes (2D) et facettes (3D)) d'un domaine maillé. Les dérivées partielles [2] et [3], qui correspondent à des variations des variables d'état entre éléments sont approchées numériquement. Les méthodes aboutissent à la résolution de systèmes matriciels différents. Les particularités tiennent à la possibilité d'intégrer des milieux plus ou moins hétérogènes, d'accepter des éléments de maillage plus ou moins irréguliers et de conserver la masse (localement / globalement) avec précision.

3 Détermination des variables d'état et des paramètres hydrodynamiques

3.1 Les mesures

La mesure de l'humidité des sols est réalisée soit par méthode directe de type gravimétrique (peser d'échantillons avant et après étuvage), soit par des méthodes indirectes, qui utilisent des relations entre la teneur en eau et d'autres propriétés physiques ou chimiques des sols plus facilement mesurables et généralement non intrusives. Ainsi, la mesure neutronique de la teneur en eau repose sur les propriétés de réflexion que possèdent les molécules d'eau à l'égard d'un flux de neutrons, tandis que la mesure capacitive (ex : Time Domain Reflectometry) relie la constante diélectrique du milieu à la teneur en eau. La pression dans un milieu poreux non saturé, aussi appelée succion (équivalent en valeur absolue) est généralement mesurée au moyen d'une

bougie poreuse et d'un système de manomètres / tensiomètres. Les infiltromètres et perméamètres sont des équipements permettant la mesure de la conductivité. La connaissance du gradient de charge et de la vitesse d'écoulement de Darcy permet d'approcher la conductivité à saturation selon l'Eq. [3]. D'autres mesures portant sur la pluviométrie, la température ou encore l'évapotranspiration sont importantes car elles constituent des conditions aux limites et/ou des grandeurs d'influence.

Il est à noter que les variables d'état mesurées sont représentatives d'un certain volume dépendant de la technique utilisée. Par ailleurs, les paramètres du modèle hydrodynamique ne sont pas mesurables directement, mais peuvent être déterminés de manière empirique à partir de données granulométriques, pédologiques et de tables.

3.2 *L'estimation des paramètres*

Deux grandes idées sont importantes pour comprendre l'estimation de paramètres. D'une part, la prévision par simulation numérique doit utiliser un minimum de données mesurées (impératifs de temps et de coût) pour produire des résultats fiables et précis à plus ou moins grande échelle. D'autre part, les mesures réalisées ne concernent pas spécifiquement des paramètres d'entrée des modèles, mais plutôt des variables de sortie utiles à leur validation. Finalement, il manque bien souvent des données pour une modélisation direct et précise du problème d'écoulement.

L'identification des paramètres hydrodynamiques par approche inverse correspond à une procédure « automatisée » de calage ou d'étalonnage du modèle. Elle présente notamment l'avantage d'être moins / non intrusive, de réduire les mesures en laboratoire et d'éviter en partie la question de représentativité des mesures. En outre, une analyse fine de la fiabilité des paramètres obtenus par calage peut être réalisée et des interprétations sur l'occurrence les processus physiques peuvent être proposées.

3.3 *Eléments théoriques de l'estimation de paramètres par méthode inverse*

L'estimation par méthode inverse est une procédure d'optimisation qui consiste à minimiser les écarts quadratiques entre les variables d'état mesurées et celles simulées en utilisant la fonction objectif suivante :

$$\Theta(y; \mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_j} W_y \left[y_{mes,j}^{n+1} - y_{cal,j}^{n+1}(\mathbf{p}) \right]^2 \quad [6]$$

où $y_{cal,j}^{n+1}$ et $y_{mes,j}^{n+1}$ correspondent aux valeurs simulées et mesurées au point j du domaine (n_j points x types de mesures) et au temps $n + 1$ (avec n_y pas de temps de mesure). Ces valeurs peuvent être des pressions et/ou de teneurs en eau. Les valeurs

sont calculées sur la base d'un vecteur de paramètres $\mathbf{p} = \{K_s, \theta_s, \theta_r, \alpha, n\}$ à optimiser, tandis que W_y est un coefficient de pondération associé aux mesures :

$$W_y = \left[\max(y_{mes,j}^{n+1}) - \min(y_{cal,j}^{n+1}) \right]^{-2} \quad [7]$$

Sur la base de paramètres fournis initialement par l'utilisateur, l'algorithme de minimisation de la fonction objectif de Levenberg – Marquardt (Kool et al., 1988) est mis en œuvre pour déterminer les corrections à apporter au jeu de paramètres courant. L'optimisation se poursuit de façon itérative jusqu'à ce que la fonction objectif soit inférieure à un seuil de tolérance et/ou que les corrections à apporter au jeu de paramètres soient inférieures à un seuil de tolérance donné. La méthode des sensibilités exactes est utilisée pour le calcul de la matrice jacobienne, ainsi que pour le gradient de la fonction objectif (Lehmann et al., 1997 ; Beydoun et al., 2006).

Outre la comparaison des écarts quadratiques entre les valeurs mesurées et celles obtenues au terme du processus d'optimisation, l'analyse de la matrice de covariance sur les paramètres permet de construire un intervalle de confiance et de mettre en évidence d'éventuelles corrélations entre paramètres, synonymes d'indétermination.

4 Résultats

4.1 *Expérience réalisée*

Un milieu hétérogène composé d'une couche de sable fin K40 intercalé entre deux couches de sable K30 est constitué dans une colonne de 1 m de hauteur (cf. Figure 2). Le dispositif expérimental comporte 9 capteurs de pression avec bougie poreuse (Keller 35x), 7 sondes capacitives (HMS900) et une balance permettant de suivre la masse d'eau cumulée. Un déversoir réglable en hauteur (initialement à 1m), permet de faire varier la condition à la limite inférieure afin de reproduire une expérience de drainage. Quatre paliers de dépression successifs sont imposés ($\Delta h = 60 / 30 / 0 / -30$ cm).

4.2 *Estimations des paramètres*

Le tableau 1 présente le jeu de paramètres utilisé pour initialiser la procédure d'estimation par méthode inverse ainsi que les paramètres obtenus au terme de la procédure, pour les deux types de sable. La valeur de la fonction objectif et sa répartition sont également reportées. Finalement, les faibles écarts entre les mesures et les résultats de simulation, reportés sur la figure 3 pour la pression et la teneur en eau, montre l'efficacité de la méthode développée.

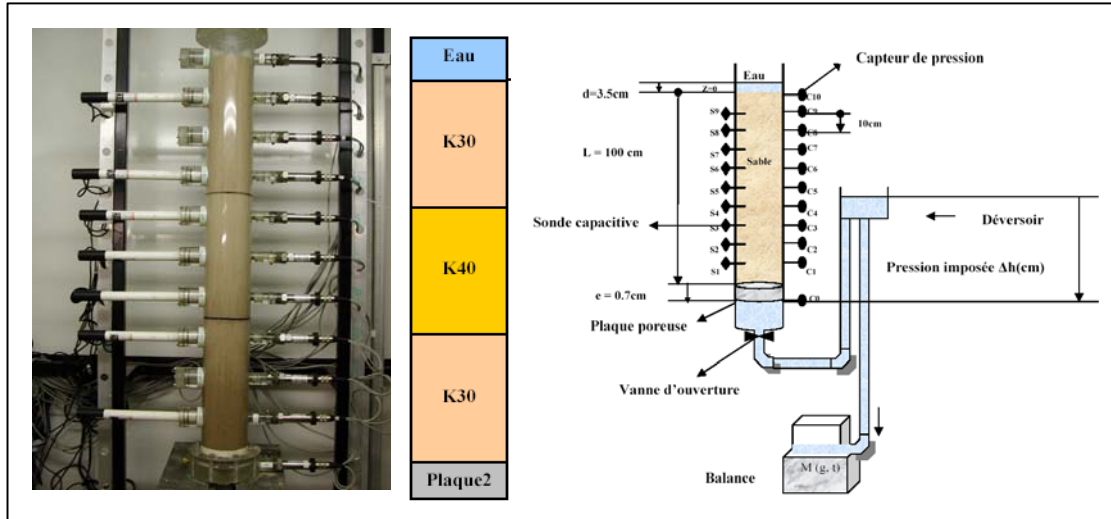


Figure 2 . Schéma du dispositif expérimental.

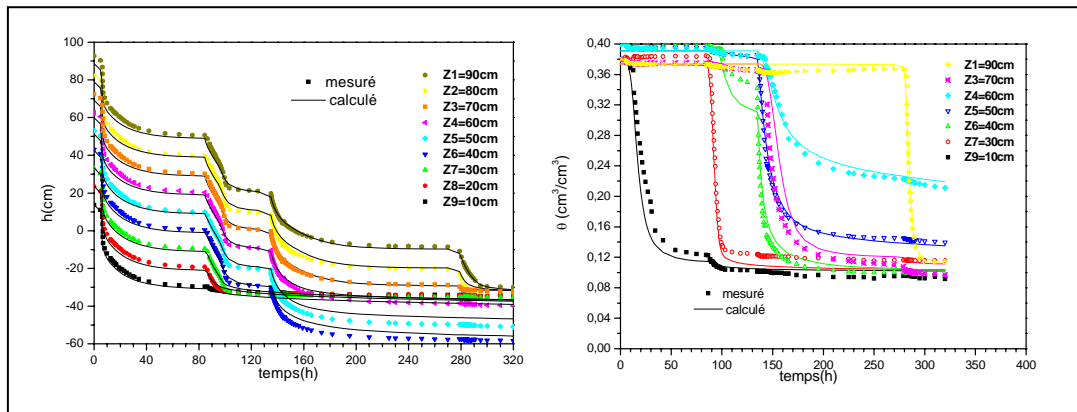


Figure 3 . Profils de pression et de teneur en eau mesurés et calculés.

		Ks (cm.s ⁻¹)	θ_r (-)	θ_s (-)	α (cm ⁻¹)	n	$\Theta(p)$	$\Theta(h)$	$\Theta(\theta)$
Initial	K30	29,7	0,045	0,43	0,145	2,68			
	K40								
Optimal	K30	22,85±153,7	0,099±0,052	0,373±0,031	0,052±0,016	7,96±7,29	1,68	0,55	1,13
	K40	5,25±25,16	0,078±0,14	0,391±0,036	0,029±0,007	6,04±7,38			

Tableau 1 . Valeurs initiales et finales des paramètres et de la fonction objectif.

5 Conclusion

La modélisation des écoulements variablement saturés nécessite la connaissance de paramètres hydrodynamiques difficilement mesurables et/ou identifiables sur le terrain. Une procédure d'estimation de paramètres par méthode inverse est présentée sommairement dans cet article. Un dispositif expérimental modélisant un problème monodimensionnel de drainage a permis de vérifier la validité et l'efficacité de la procédure développée.

Bibliographie

- Belfort B., Lehmann F., « Comparison of equivalent conductivities for numerical simulation of one-dimensional unsaturated flow », *Vadose Zone Journal*, vol. 4, 2005, p. 1191-2000.
- Bergamaschi L., Putti M., « Mixed finite elements and Newton-type linearizations for the solution of Richards' equation », *International Journal for Numerical methods in Engineering*, vol. 45, 1999, p. 1025-1046.
- Beydoun H., Lehmann F., « Expériences de drainage et estimation de paramètres en milieu poreux non saturé », *Comptes Rendus Géoscience*, 2006, vol. 338, p. 180-187.
- Carsel R. F., Parrish R. S., « Developing joint probability distributions of soils water retention characteristics ». *Water Resources Research*, vol. 24, 1988, p. 755-769.
- Hillel D., « *L'eau dans le sol : principes et processus physiques* », Louvain-la-Neuve : Academia, Pédasup5, 1988, 294p.
- Kool J.B., Parker J.C., « Analysis of the inverse problem for transient unsaturated flow », *Water Resources Research*, vol. 24, 1988, p. 817-830.
- Lehmann F., Ackerer Ph., « Determining soil hydraulic properties by inverse method in one-dimensional unsaturated flow », *Journal of Environmental Quality*, vol. 26, 1997, p. 76-81.
- Manzini G., Ferraris S., « Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards' equation », *Advances in Water Resources*, vol. 27, 2004, p. 1199-1215.
- Musy A., Soutter M., « *Physique du sol* », Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, collection Gérer l'environnement, 1991, 335p.
- Narasimhan T.N., « Darcy's law and unsaturated flow », *Vadose Zone Journal*, vol. 3, 2004, p. 1059.
- van Genuchten M.T., « A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils », *Soil Science Society of America Journal*, vol.44, 1980, p.892-898.