
Estimation d'état pour systèmes non linéaires à une entrée une sortie

B. Schwaller * — **D. Ensminger** * — **J. Ragot** ** — **B. Dresp** ***

* *Département GIM, IUT Louis Pasteur de Schiltigheim,
IMFS, FRE CNRS-UDS 3240, schwaller@convergence.u-strasbg.fr*

** *Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
INPL, UHP UMR 7039 CNRS, jose.Ragot@ensem.inpl-nancy.fr*

*** *Laboratoire de Mécanique et Génie Civil,
Université Montpellier 2, UMR 5508 CNRS, dresp@lmgc.univ-montp2.fr*

RÉSUMÉ. Dans cette étude, on propose un nouveau type d'observateur d'état pour des systèmes dynamiques comportant des non linéarités polynomiales. La stabilité de la structure proposée est analysée, de même que la convergence uniforme des estimations d'état. Le critère algébrique simple et efficace des polynômes normaux d'amortissement de Naslin permet de réaliser la synthèse des paramètres. Une série de simulations viennent illustrer les développements proposés sur la base d'une équation de Van der Pol.

ABSTRACT. In this study a new type of state observer for dynamic systems containing non-linear polynomials is proposed. The stability of the structure and also the uniform convergence of the state estimates are analyzed. The simple and efficient algebraic criteria of Naslin normal damping polynomials permit synthesis of the parameters. A series of simulations illustrates the proposed developments based on a Van der Pol equation.

MOTS-CLÉS : Liapounoff, observateur adaptatif non-linéaire, stabilité

KEYWORDS: Lyapunov, non linear adapted observer, stability

1. Introduction

Depuis les travaux de *Luenberger* [LUE 66], les observateurs d'état sont utilisés autant en modélisation, qu'en contrôle ou identification de systèmes linéaires ou non linéaires. On peut entre autre citer les travaux de *Bastin* [BAS 88] concernant certains systèmes non linéaires transformables en une forme canonique d'observation. Pour réduire l'ordre et de la complexité de systèmes dynamiques, *Stoev* [J.H 02] exploite des observateurs non linéaires utilisant des splines. Pour réaliser l'estimation d'un vecteur d'états pour des systèmes fortement bruités, *Raoufi* [RAO 05] utilise une approche stochastique. La principale difficulté rencontrée dans l'utilisation d'observateurs avec les systèmes non linéaires réside dans la mise en place d'une méthode de synthèse des paramètres. C'est pour contourner cette difficulté qu'est apparue la technique des observateurs à forts gains proposée par *Tornambè* [TOR 92], [BUL 98], [BES 04], [NIK 05]. Cette approche consiste à réduire l'erreur d'observation dans une gamme d'amplitudes prédéterminée en ayant la possibilité de s'abstraire des paramètres.

Le but de cette étude est de proposer un nouveau type d'observateur d'état pour systèmes physiques SISO, sans avoir à fixer arbitrairement une telle bande de fluctuation. Les systèmes concernés par cette approche sont modélisables par des équations différentielles comportant des non linéarités de type polynomiales. L'objectif est de reconstruire une estimation non biaisée de l'espace d'état du système physique, à partir d'un jeu de paramètres pour l'observateur, et d'une seule variable de sortie mesurée. La mesure en question est éventuellement bruitée, et le bruit peut être ou non corrélé. Les systèmes physiques concernés par notre approche sont uniformément observables au sens de *Gauthier* [GAU 81] et *Hermann* [HER 77]. Ceci signifie que l'état du système modélisé peut être déterminé à partir de son entrée $u_0(t)$ et sa sortie $y(t)$. De la façon la plus générale possible, on formalise ceci par :

$$\frac{d x_i(t)}{dt} = x_{i+1}(t) \quad i = 0 \dots n - 1 \quad (1a)$$

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} b_i \Gamma_i [\underline{u}(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i(t) - \sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Psi_i [\underline{x}(t)] \quad (1b)$$

$$y(t) = x_\theta(t) \quad (1c)$$

avec :

- n est l'ordre de l'équation différentielle
- ν est le nombre de fonctions d'entrées du système
- $\Gamma_i [\underline{u}(t)]$ sont les ν fonctions d'entrées continûment dérivables, linéairements indépendantes utilisant comme variables le vecteur des dérivées successives $\underline{u}^T(t) = [u_0(t), \dots, u_{\nu-1}(t)]$
- $x_i(t)$ est la $i_{\text{ème}}$ dérivée temporelle de $x_0(t)$; le vecteur d'état s'écrit $\underline{x}^T(t) = [x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)]$
- $\xi - n$ est le nombre de fonctions du vecteur $\underline{x}(t)$

- $\Psi_i [\underline{x}(t)]$ sont les fonctions d'état polynomiales, continûment dérivables, linéairement indépendantes utilisant comme variables le vecteur d'état $\underline{x}(t)$
- a_i, b_i sont les paramètres du système physique
- $y(t)$ est la variable de sortie mesurable
- θ est l'index de la variable d'état mesurée, compris entre 0 et $n - 1$

Comme exemple d'un tel système à une entrée, une sortie, considérons l'équation de *Van der Pol* [POL 27] :

$$x_1(t) = \frac{d x_0(t)}{dt}, \quad x_2(t) = \frac{d x_1(t)}{dt} \quad (2a)$$

$$x_2(t) = b_0 u_0(t) - a_0 x_0(t) - a_1 x_1(t) - a_2 \Psi_2 [\underline{x}(t)] + a_3 \Psi_3 [\underline{x}(t)] \quad (2b)$$

$$\Psi_2 [\underline{x}(t)] = x_1(t) x_0(t)^2 \quad (2c)$$

$$\Psi_3 [\underline{x}(t)] = x_1(t) \quad (2d)$$

$$y(t) = x_0(t) \quad (2e)$$

avec $n = 2, \nu = 1, \xi = 4$ ■

En § 2.1 on procèdera à la description du nouvel observateur. Une méthode de calcul est proposée en § 2.2 pour prouver le caractère uniformément convergent du vecteur d'état de l'observateur vers celui du système physique. En § 2.3 cette même méthode est utilisée pour prouver la stabilité de l'observateur. En § 2.4 on abordera la problématique de la synthèse de ses paramètres. En § 3 quelques simulations illustreront l'observation d'état du système (2).

2. Observateur

2.1. Description

Les fonctions $\Gamma_i [\underline{u}(t)]$ (1b) utilisent éventuellement les dérivées successives $u_1(t)$ à $u_{n-1}(t)$ de $u_0(t)$. Si c'est le cas, ces dérivées doivent être reconstruites pour être accessibles à l'observateur d'état. Pour éviter les dérivées par différence première, on filtre le signal de stimulation par un filtre passe-bas à pôles multiples, de gain unitaire et d'ordre n . Soit $u(t)$ son entrée, $\hat{u}_0(t), \dots, \hat{u}_n(t)$ ses variables d'état, $1/T_f$ sa fréquence de coupure, r_i ses paramètres. La structure d'un tel filtre est définie par :

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(t) &= \frac{d \hat{u}_{i-1}(t)}{dt} \quad i = 1 \dots n \\ \hat{u}_n(t) &= \frac{1}{r_n} z(t) - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \hat{u}_i(t) \\ r_i &= \frac{n!}{i! (n-i)!} T_f^i \quad i = 0 \dots n \end{aligned} \quad (3)$$

La fréquence de coupure $1/T_f$ doit être choisie au-delà de la fréquences propres la plus élevée du système physique, pour conserver la richesse spectrale de stimulation. Les variables d'état $\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_{n-1}(t)$ du filtre sont alors exploitables par l'observateur, $\hat{u}_0(t)$ est commune au système physique et à l'observateur. L'estimation de la distance d'état entre le système physique et l'observateur est formée à partir de $y(t)$ et de $\hat{x}_\theta(t)$, l'estimée de $x_\theta(t)$ par l'observateur :

$$\Delta y_\theta(t) = y(t) - \hat{x}_\theta(t) \quad (4a)$$

$$= x_\theta(t) - \hat{x}_\theta(t) = \Delta x_\theta(t) \quad (4b)$$

Après θ intégrations successives de l'écart $\Delta y_\theta(t)$ on obtient la distance $\Delta y_0(t)$:

$$\frac{d \Delta y_i(t)}{dt} = \Delta y_{i+1}(t) \quad i = 0 \dots \theta - 1 \quad (5a)$$

$$\Delta y_0(t) = \Delta x_0(t) \quad (5b)$$

Cette distance est utilisée comme erreur d'observation :

$$\frac{d \hat{x}_i(t)}{dt} = \hat{x}_{i+1}(t) + h_{n-i-1} \Delta y_0(t) \quad i = 0 \dots n - 1 \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_n(t) = & \sum_{i=0}^{\nu-1} b_i \Gamma_i [\hat{u}(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \hat{x}_i(t) \\ & - \sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Psi_i [\hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (6b)$$

avec :

– h_i : les n paramètres de l'observateur

– $\Psi_i [\hat{x}(t)]$: les $\xi - n$ fonctions d'état linéairement indépendantes utilisant le vecteur d'état $\hat{x}^T(t) = [\hat{x}_0(t), \dots, \hat{x}_{n-1}(t)]$ comme variables.

(6b) constitue la loi de comportement non linéaire de l'observateur. Comme exemple illustratif, l'observateur d'état du système (2) s'écrit :

$$\Delta y_0(t) = x_0(t) - \hat{x}_0(t) \quad (7a)$$

$$\frac{d \hat{x}_0(t)}{dt} = \hat{x}_1(t) + h_1 \Delta y_0(t) \quad (7b)$$

$$\frac{d \hat{x}_1(t)}{dt} = \hat{x}_2(t) + h_0 \Delta y_0(t) \quad (7c)$$

$$\hat{x}_2(t) = b_0 \hat{u}_0(t) - a_0 \hat{x}_0(t) - a_2 \Psi_2 [\hat{x}(t)] + a_3 \Psi_3 [\hat{x}(t)] \quad (7d)$$

$$\Psi_2 [\hat{x}(t)] = \hat{x}_1(t) \hat{x}_0(t)^2 \quad (7e)$$

$$\Psi_3 [\hat{x}(t)] = \hat{x}_1(t) \quad (7f)$$

Les paramètres a_2 , a_3 font partie de la loi non linéaire d'amortissement variable de l'équation de *Van der Pol* ■

2.2. Convergence de la reconstruction d'état

Le but de l'analyse de convergence de l'observateur est de démontrer son caractère globalement asymptotique au sens de *Liapounoff* vis à vis du système. En d'autres termes, quelque soient les conditions initiales de l'observateur, ce dernier convergera-t-il vers l'état du système physique ? Pour effectuer cette analyse, on ramène (6) à une seule relation dépendant uniquement de $\hat{x}_0(t)$ et de ses dérivées successives. Pour y parvenir, on transforme (6a) en :

$$\hat{x}_{i+1}(t) = \frac{d \hat{x}_i(t)}{dt} - h_{n-i-1} \Delta x_0(t) \quad (8)$$

La dérivée temporelle de (8) peut être égalée au membre de droite de (6a) d'ordre supérieur. Chaque variable d'état $\hat{x}_1(t) \dots \hat{x}_n(t)$ peut ainsi s'écrire sous forme de dérivées successives de \hat{x}_0 :

$$\hat{x}_i(t) = \frac{d^{(i)} \hat{x}_0(t)}{dt^{(i)}} - \sum_{j=1}^i h_{n-j} \frac{d^{(i-j)} \Delta x_0(t)}{dt^{(i-j)}} \quad (9)$$

Pour la suite, simplifions l'écriture des dérivées temporelles :

$$x_i(t) = \frac{d^{(i)} \hat{x}_0(t)}{dt^{(i)}} \quad (10a)$$

$$\Delta x_i = \frac{d^{(i)} \Delta x_0(t)}{dt^{(i)}} = x_i(t) - \hat{x}_i(t) \quad (10b)$$

Cette simplification permet de définir le vecteur

$$\underline{x}(t)^T = [x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)]$$

le vecteur des distances d'état

$$\Delta \underline{x}(t)^T = [\Delta x_0(t), \dots, \Delta x_{n-1}(t)]$$

et de réécrire (9) :

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t) - \sum_{j=1}^i h_{n-j} \Delta x_{i-j}(t) \quad i = 1 \dots n-1 \quad (11)$$

Analysons à présent l'écart de dynamique entre les variables $x_i(t)$ et $\hat{x}_i(t)$ sous la forme de variables $\Delta x_i(t)$:

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t) \quad i = 1 \dots n - 1 \quad (12a)$$

$$= \Delta x_i(t) + \sum_{j=1}^i h_{n-j} \Delta x_{i-j}(t) \quad (12b)$$

Si l'on forme l'écart $\Delta x_n(t)$ entre (1b) et (6b) il vient :

$$\Delta x_n(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Delta x_i(t) - \sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta \hat{\Psi}_i(t) \quad (13a)$$

$$\Delta \hat{\Psi}_i(t) = \Psi_i[\underline{x}(t)] - \Psi_i[\underline{\hat{x}}(t)] \quad (13b)$$

Le même $\Delta x_n(t)$ peut être réécrit à partir de (12b) :

$$\Delta x_n(t) = \Delta x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Delta x_i(t) \quad (14)$$

En égalant les membres de droite de (13a) et (14), on obtient :

$$0 = \Delta x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + h_i) \Delta x_i(t) + \sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta \hat{\Psi}_i(t) \quad (15)$$

Dans cette expression, on cherche à remplacer le dernier membre de droite par une expression factorisable à l'aide de $\Delta x_i(t)$. Pour y arriver, les termes $\hat{x}_i(t)$ des fonctions $\Psi_j[\underline{\hat{x}}(t)]$ pour $i = 1 \dots n - 1$ sont remplacés par les membres de droite de (11). On peut illustrer ce point en développant par exemple les fonctions $\Psi_2[\underline{\hat{x}}(t)]$, $\Psi_3[\underline{\hat{x}}(t)]$ à l'aide de (7e) et (7f) :

$$\begin{aligned} \Psi_2[\underline{\hat{x}}(t)] &= x_1(t) x_0(t)^2 - h_1 x_0(t)^2 \Delta x_0(t) \\ &= \Psi_2[\underline{x}(t)] - h_1 x_0(t)^2 \Delta x_0(t) \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\Psi_3[\underline{\hat{x}}(t)] = x_1(t) - h_1 \Delta x_0(t) = \Psi_3[\underline{x}(t)] - h_1 \Delta x_0(t) \quad \blacksquare \quad (16b)$$

Les fonctions Ψ_i étant de nature polynomiales, on peut introduire la formule de transformation :

$$\Psi_i[\underline{\hat{x}}(t)] = \Psi_i[\underline{x}(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j(t) g_{ij}[\underline{x}(t)] \quad (17)$$

Les fonctions $g_{ij}[\underline{x}(t)]$ résultent des factorisations par le vecteur $\Delta\underline{x}(t)$ des termes restants de $\Psi_i[\hat{\underline{x}}(t)]$. On peut ainsi factoriser les fonctions $\Psi_2[\hat{\underline{x}}(t)]$ et $\Psi_3[\hat{\underline{x}}(t)]$ de l'exemple (16) :

$$g_{20}[\underline{x}(t)] = h_1 x_0(t)^2 \quad g_{21}[\underline{x}(t)] = 0 \quad (18a)$$

$$g_{30}[\underline{x}(t)] = h_1 \quad g_{31}[\underline{x}(t)] = 0 \quad \blacksquare \quad (18b)$$

Le dernier membre de gauche de (15) peut s'écrire :

$$\sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta\hat{\Psi}_i(t) = \sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta\Psi_i(t) + \sum_{i=n}^{\xi-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i \Delta x_j(t) g_{ij}[\underline{x}(t)] \quad (19a)$$

$$\Delta\Psi_i(t) = \Psi_i[\underline{x}(t)] - \Psi_i[\hat{\underline{x}}(t)] \quad (19b)$$

On cherche à présent à factoriser les fonctions $\Delta\hat{\Psi}_i(t)$ par le vecteur des distances $\Delta\underline{x}(t)$. Pour y arriver, on introduit les fonctions $f_{ij}[\Delta\underline{x}(t)]$ telles que :

$$\sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta\Psi_i(t) = \sum_{i=n}^{\xi-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i \Delta x_j(t) f_{ij}[\Delta\underline{x}(t)] \quad (20a)$$

$$f_{ij}[\Delta\underline{x}(t)] = \frac{\Delta\Psi_i(t)}{\Delta x_j(t)} \geq 0 \quad (20b)$$

Ces fonctions $f_{ij}[\Delta\underline{x}(t)]$ sont soit nulles, soit définies semi-positives (20b). On peut ainsi factoriser les fonctions $\Delta\Psi_2(t)$ et $\Delta\Psi_3(t)$ de l'exemple (16) :

$$f_{20}[\Delta\underline{x}(t)] = 0 \quad f_{21}[\Delta\underline{x}(t)] = \frac{\Delta\Psi_2(t)}{\Delta x_1(t)} \quad (21a)$$

$$f_{30}[\Delta\underline{x}(t)] = 0 \quad f_{31}[\Delta\underline{x}(t)] = \frac{\Delta\Psi_3(t)}{\Delta x_1(t)} \quad (21b)$$

On intervertit à présent l'ordre de sommation du membre de droite de (20a) et du deuxième membre de droite de (19a); (19) se réécrit alors :

$$\sum_{i=n}^{\xi-1} a_i \Delta\hat{\Psi}_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(t) \Delta x_i(t) \quad (22a)$$

$$Z_i(t) = \sum_{j=n}^{\xi-1} a_j g_{ji}[\underline{x}(t)] + f_{ji}[\Delta\underline{x}(t)] \quad (22b)$$

En insérant (22) dans (15) on obtient l'équation différentielle des distances d'état :

$$0 = \Delta x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \Delta x_i(t) \quad (23a)$$

$$A_i(t) = A_i + Z_i(t), \quad A_i = a_i + h_i \quad (23b)$$

Pour démontrer la convergence uniforme des distances d'état vers $\underline{0}$, on cherche à définir une fonction de *Liapounoff* appropriée. On peut choisir d'utiliser la forme quadratique-intégrale suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^T \underline{P}_n \Delta \underline{x} + I(\Delta \underline{x}) \quad (24a)$$

$$\underline{P}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{(n-1)0} & \dots & \dots & \alpha_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad (24b)$$

$V(t)$ caractérise la stabilité de (23a). \underline{P}_n est une matrice triangulaire $n \times n$ définie positive. Le terme intégrale $I(\Delta \underline{x})$ est défini positif. Les conditions nécessaires à sa détermination sont définies par les démonstrations suivantes. La forme développée de \underline{P}_n s'écrit :

$$V(t) = I(\Delta \underline{x}) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \frac{\alpha_{ij}}{2} \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) \quad (25)$$

Le choix des paramètres α_{ij} ne peut se faire qu'en conciliant la positivité de $V(t)$ et la semi négativité de $\dot{V}(t)$. Pour obtenir $\dot{V}(t)$ on dérive temporellement (25), il vient :

$$\dot{V}(t) = \dot{I}(\Delta \underline{x}) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \frac{\alpha_{ij}}{2} \Delta X_{ij}(t) \quad (26a)$$

$$\Delta X_{ij}(t) = \Delta x_{i+1}(t) \Delta x_j(t) + \Delta x_i(t) \Delta x_{j+1}(t) \quad (26b)$$

que l'on peut également mettre sous la forme suivante :

$$\dot{V}(t) = \dot{I}(\Delta \underline{x}) + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^i \frac{\alpha_{ij}}{2} \Delta X_{ij}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_{(n-1)j}}{2} \Delta X_{nj}(t) \quad (27a)$$

$$\Delta X_{nj}(t) = \Delta x_n(t) \Delta x_j(t) + \Delta x_{(n-1)}(t) \Delta x_{(j+1)}(t) \quad (27b)$$

A l'aide du membre de droite de (23) on remplace dans (27b) les dérivées d'ordre n par :

$$\Delta x_n(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} A_i + Z_i(t) \Delta x_i(t) \quad (28)$$

L'étape suivante consiste à factoriser les produits $\Delta x_i(t) \Delta x_j(t)$ de (27), et à choisir la valeur de chaque paramètre de α_{ij} de sorte à :

- obtenir que les mineurs principaux de \underline{P}_n soient tous supérieurs à 0, donc $\forall i = j, \alpha_{ij} > 0$;
- à annuler les paramètres α_{ij} si $Mod_2(i + j) = 1$, ce qui revient à annuler une diagonale sur deux de \underline{P}_n ;
- à éliminer le maximum de produits $\Delta x_i(t) \Delta x_j(t)$ de (27) pour lesquels $i \neq j$.

A ce stade, ce travail devient spécifique à chaque ordre n choisi. Pour $n = 1$ à 4, les combinaisons \underline{P}_n suivantes permettent d'obtenir la positivité au sens de *Sylvester* :

$$\underline{P}_1 = 1 \quad (29a)$$

$$\underline{P}_2 = \begin{matrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad (29b)$$

$$\underline{P}_3 = \begin{matrix} \frac{A_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{2} & 0 \\ A_1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (29c)$$

$$\underline{P}_4 = \begin{matrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2}{2} & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & \frac{A_2^2}{2 A_0} - 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{A_2}{2 A_0} \end{matrix} \quad (29d)$$

avec les conditions peu restrictives suivantes :

$$A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \quad (30a)$$

$$A_2 > \frac{A_0}{2} \text{ pour } n = 4 \quad (30b)$$

Pour garantir la positivité des fonctions $Z_i(t) \Delta x_i(t)$, les conditions suivantes doivent être respectées :

$$\dot{I}(\Delta \underline{x}) \leq - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(t) \Delta x_i(t) \quad (31)$$

L'intégrale des termes $Z_i(t) \Delta x_i(t)$ potentiellement définis positifs dans le membre de droite de (31) permet de déterminer $\dot{I}(\Delta \underline{x})$, et garantit la semi-négativité de $\dot{V}(t)$. Ce point est illustré par l'exemple de § 3 (59) à (62).

10 enriut09.

Il résulte pour $\dot{V}(t)$

En utilisant (11), le deuxième membre de gauche de (34) s'écrit :

$$a_j \hat{x}_j(t) = a_j x_0(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i a_i h_{n-j} \Delta x_{i-j}(t) \quad (35a)$$

$$a_j \hat{x}_j(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_j(t) - \sum_{i=0}^{n-2} p_i \Delta x_i(t) \quad (35b)$$

$$p_i = \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j h_{n+i-j} \quad (35c)$$

En (17) les fonctions $\Psi_i [\hat{\underline{x}}(t)]$ ont été décomposés à partir d'une factorisation par des termes $\Delta x_j(t)$. Dans cette expression factorisons les fonctions $\Psi_i [\underline{x}(t)]$ par $x_j(t)$. On obtient la formule de transformation :

$$\Psi_i [\underline{x}(t)] = \prod_{j=0}^{n-1} x_j(t) f_{ij} [\underline{x}(t)] \quad (36)$$

On peut ainsi factoriser les fonctions $\Psi_2 [\underline{x}(t)]$ et $\Psi_3 [\underline{x}(t)]$ de l'exemple (16) :

$$f_{20} [\underline{x}(t)] = 0 \quad f_{21} [\underline{x}(t)] = x_0^2 \quad (37a)$$

$$f_{30} [\underline{x}(t)] = 0 \quad f_{31} [\underline{x}(t)] = 1 \quad \blacksquare \quad (37b)$$

En remplaçant les fonctions $\Psi_i [\underline{x}(t)]$ ainsi factorisées dans (17), on développe le dernier membre de gauche de (34) :

$$a_i \Psi_i [\hat{\underline{x}}(t)] = \sum_{i=0}^{\xi-1} Y_i(t) x_i(t) + Z_i(t) \Delta x_i(t) \quad (38a)$$

$$Y_i(t) = \sum_{j=n}^{\xi-1} a_j f_{ji} [\underline{x}(t)], \quad Z_i(t) = \sum_{j=n}^{\xi-1} a_j g_{ji} [\underline{x}(t)] \quad (38b)$$

(35b) et (38) sont insérés dans les deux derniers membres de gauche de (34), et l'on tire l'équation différentielle de l'observateur sous forme de dérivées successives $x_i(t)$:

$$b_i \Gamma_i [\hat{\underline{u}}(t)] + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(t) x_i(t) = x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) x_i(t) \quad (39)$$

avec :

$$B_i(t) = h_i + Z_i(t) \quad i = n - 1 \quad (40a)$$

$$B_i(t) = h_i + p_i + Z_i(t) \quad i = 0 \dots n - 2 \quad (40b)$$

$$A_i = a_i + h_i \quad i = n - 1 \quad (40c)$$

$$A_i = a_i + h_i + p_i \quad i = 0 \dots n - 2 \quad (40d)$$

$$A_i(t) = A_i + Y_i(t) + Z_i(t) \quad (40e)$$

Le membre de gauche de (39) constitue l'ensemble des entrées de l'observateur. La stabilité de ce dernier peut être analysée sur la base du membre de droite, qui caractérise la dynamique de l'observateur :

$$x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) x_i(t) = 0 \quad (41)$$

Si cette équation tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$ quelque soient les conditions initiales $\hat{x}(0)$ de l'observateur, alors le système sera stable. Pour le démontrer, on définit une fonction de *Liapounoff* appropriée. On peut choisir d'utiliser une forme quadratique-intégrale des variables d'état. Sous forme matricielle on écrit :

$$V(t) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{P}_n \underline{x} + I(t) \quad (42)$$

La matrice \underline{P}_n est identique à celle déterminée au § 2.2. Le terme intégral $I(t)$ est défini positif. Ses conditions de détermination vont être précisées dans les calculs qui suivent. En suivant une procédure de calcul identique à (26) la dérivée temporelle de (42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{d I(t)}{dt} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^i \frac{\alpha_{ij}}{2} X_{ij}(t) \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_{(n-1)j}}{2} X_{nj}(t) \end{aligned} \quad (43a)$$

$$X_{ij}(t) = x_{i+1}(t) x_j(t) + x_i(t) x_{j+1}(t) \quad (43b)$$

$$X_{nj}(t) = x_n(t) x_j(t) + x_{(n-1)}(t) x_{(j+1)}(t) \quad (43c)$$

A l'aide de (40e) et (41) les dérivées d'ordre n de (43c) sont remplacées par :

$$x_n(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} A_i x_i(t) - \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(t) + Z_i(t) x_i(t) \quad (44)$$

Pour contrôler la possible positivité de certaines fonction $[Y_i(t) + Z_i(t)] x_i(t)$, on doit toujours respecter les conditions suivantes :

$$\frac{d I(t)}{dt} \leq - \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(t) + Z_i(t) x_i(t) \quad (45)$$

L'intégrales des termes $Y_i(t) + Z_i(t) x_i(t)$ potentiellement définis positifs dans le membre de droite de (45) permet de déterminer $I(t)$, et permet de garantir la semi-négativité de $\dot{V}(t)$. Ce point est illustré par l'exemple du § 3 (49) à (57). La suite des calculs est absolument identique à celle de § 2.2 (29) à (33). La stabilité de l'observateur est prouvée jusqu'à l'ordre 4.

2.4. Synthèse des paramètres de l'observateur

Les précédentes démonstrations de convergence uniforme § 2.2 et de stabilité globalement asymptotique de l'observateur § 2.3 autorisent une synthèse de ses paramètres h_i en appliquant une approximation à l'ordre un de *Liapounoff*, [LYA 92] [GIL 88] [FUL 92] à (39) et (40). Ceci revient à y négliger les termes non linéaires $Y_i(t) + Z_i(t)$. (39) prend alors la forme d'une équation différentielle linéaire classique. Cette approximation concerne l'étude des points singuliers d'un système non linéaire. On doit à *Liapounoff* un important théorème d'après lequel, sauf dans un cas "critique" exceptionnel, on peut déterminer la nature du point singulier et notamment sa stabilité en négligeant les termes de degrés supérieurs à 2. Ce théorème constitue une justification de l'approximation des petits mouvements, qui consiste à linéariser un système non linéaire en se limitant à de petits domaines de variation des variables, autrement dit, en assimilant les fonctions non linéaires des variables au premier terme de leurs développements en série.

Dans notre cas, cette propriété permet de réaliser la synthèse des gains h_i et de garder les racines de l'équation caractéristique de l'observateur linéarisé dans des conditions où cette approximation est valide. On évite ainsi le "cas critique" de *Liapounoff*. Les "petits mouvements" dont il est question concernent les différences de trajectoires d'états entre le système et son observateur. Le rôle d'une structure observatrice étant de réduire constamment ces différences, il est clair que le théorème en question y trouve un parfait domaine d'application. Ne pas utiliser cette facilité conduit à des équations très complexes et spécifiques à chaque modèle du comportement entrées-sorties de l'observateur. Cette inutile complexité rend très ardue toute tentative de synthèse des coefficients h_i , alors que la stabilité du système linéarisé permet d'affirmer celle du système réel. En tenant compte de toutes ces considérations, on peut réécrire le membre de droite de (39) comme suit :

$$x_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i x_i(t) \quad (46)$$

La stabilité d'un système linéaire est liée à la position dans le plan complexe des racines de son équation caractéristique. Le critère de *Routh-Hurwitz* et la méthode des séparatrices d'*Ajzerman* [AJZ 60] fournissent des conditions pour que ces racines soient toutes à parties réelles négatives, c'est-à-dire pour que le système considéré soit stable. Mais sous leur forme usuelle, ces critères ne donnent aucune information sur l'amortissement des régimes transitoires. Les polynômes normaux d'amortissement de *Naslin* [NAS 60] [NAS 63] [HUM 70] [GIS 90] fournissent un critère algébrique permettant l'analyse simple et rapide de l'amortissement associé aux racines de l'équation caractéristique dans l'espace des paramètres.

Un polynôme normal $D(s) = a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n$ de degré n est entièrement défini par :

- sa première pulsation caractéristique ω_0
- et son intervalle caractéristique γ .

Les pulsations caractéristiques de $D(s)$ définies par *Naslin* sont :

$$\omega_0 = \frac{a_0}{a_1}, \omega_1 = \frac{a_1}{a_2}, \dots, \omega_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Le lien entre pulsations caractéristiques et intervalle caractéristique γ est donné par :

$$\omega_0, \omega_1 = \omega_0 \cdot \gamma, \omega_2 = \omega_0 \cdot \gamma^2, \dots, \omega_{n-1} = \omega_0 \cdot \gamma^{n-1}$$

Le coefficient γ est assimilé au régime d'amortissement général de $D(s)$. Les polynômes normaux d'amortissement sont définis par la condition que les intervalles de fréquence aient une valeur identique γ . Pour exploiter cette technique de synthèse, on choisit pour l'observateur une constante de temps T_{obs} de dynamique plus élevée que celle du système physique. L'ajustement des coefficients selon *Naslin* respecte le critère de *Routh-Hurwitz*. Le fait que les polynômes normaux constituent une condition suffisante pour un bon amortissement permet de garantir la stabilité de l'observateur. On détermine en premier lieu le coefficient h_{n-1} d'ordre le plus élevé :

$$h_{n-1} = \frac{\gamma^{(n-1)}}{T_{obs}} - a_n \quad (47)$$

D'un point de vue pratique, on donne souvent au coefficient γ des valeurs comprises entre 2 et 5/2. De proche en proche, on peut calculer ensuite les coefficients h_i par ordre décroissant, de $i = n - 2$ à 0 :

$$h_i = \frac{\gamma^j}{T_{obs}} - a_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j h_{n+i-j} \quad (48)$$

La synthèse des gains h_i est réalisée à partir des résultats de l'approximation (46). Leur mise en œuvre répond toutefois aux relations "exactes"(6), (23), en prenant soin

d'initialiser le vecteur d'état $\hat{x}_0(0), \dots, \hat{x}_{n-1}(0)$ à 0. Ce fait mérite d'être souligné. En procédant ainsi, les erreurs d'état sont diminuées, confortant la validité de l'approximation à l'ordre 1 de *Liapounoff* décrite précédemment.

L'intérêt pratique du critère algébrique de *Naslin* réside dans sa simplicité de mise en œuvre pour générer des gains h_i en fonction des paramètres du système. Ceci permet de conserver un amortissement garantissant un régime stable.

3. Exemple applicatif

Etudions la stabilité de l'observateur d'état (7) du système de *Van der Pol* (2). Les fonctions $\Psi_2[\hat{\underline{x}}(t)]$ et $\Psi_3[\hat{\underline{x}}(t)]$ de (7) ont été développées (16) sous forme de dérivées successives de $x_0(t)$. En utilisant (37a), (37b) et (18a), (18b), les fonctions $f_{ji}[\underline{x}(t)]$ et $g_{ji}[\underline{x}(t)]$ permettent de poser les définitions suivantes :

$$Z_0(t) = a_2 h_1 x_0(t)^2 \quad Z_1(t) = 0 \quad (49a)$$

$$Y_0(t) = 0 \quad Y_1(t) = a_2 x_0(t)^2 - a_3 \quad (49b)$$

$$A_0 = a_0 + h_0 \quad A_1 = h_1 \quad (49c)$$

$$A_0(t) = A_0 + Z_0(t) \quad A_1(t) = A_1 + Y_1(t) \quad (49d)$$

$$B_0(t) = h_0 + Z_0(t) \quad B_1(t) = h_1 \quad (49e)$$

L'équation différentielle de l'observateur peut être mise sous une forme similaire à celle de (39) :

$$x_2(t) + A_1(t) x_1(t) + A_0(t) x_0(t) = b_0 \hat{u}_0(t) + B_1(t) x_1(t) + B_0(t) x_0(t) \quad (50)$$

Pour analyser la stabilité de (50), on annule son membre de droite. Du fait des fonctions non linéaires $Y_i(t) + Z_i(t)$, on utilise la fonctions de *Liapounoff* quadratique plus intégrale suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{P}_2 \underline{x} + I(t), \quad \underline{P}_2 = \begin{matrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad (51)$$

En dérivant (51), la fonction $\dot{V}(t)$ s'écrit :

$$\dot{V}(t) = A_0 x_0(t) x_1(t) + x_1(t) x_2(t) + \dot{I}(t) \quad (52a)$$

$$= - A_1 + Z_1(t) x_1(t)^2 - Z_0(t) x_0(t) x_1(t) + \dot{I}(t) \quad (52b)$$

En fixant les conditions :

$$h_0 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0 \quad (53a)$$

$$h_1 > a_3, \quad a_0 + h_0 > a_3 h_1 \quad (53b)$$

les paramètres h_0, h_1 sont calculés à l'aide de (47) et (48), qui permettent de satisfaire aux conditions (53). Le premier membre de droite de (52b) est semi-négatif, et la matrice \underline{P}_2 est définie positive. On développe $\dot{V}(t)$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - h_1 - a_3 + a_2 x_0(t)^2 \quad x_1(t)^2 \\ & - a_2 h_1 x_1(t) x_0(t)^3 + k_0 \iota_0(\underline{x}) \frac{d x_i(t)}{dt} \end{aligned} \quad (54)$$

dont on égale les deux derniers termes du membre de droite :

$$k_0 \iota_0(\underline{x}) \frac{d x_i(t)}{dt} = a_2 h_1 x_1(t) x_0(t)^3 \quad (55a)$$

$$\frac{d x_i(t)}{dt} = x_1(t), \quad \iota_0(\underline{x}) = x_0(t)^3, \quad k_0 = a_2 h_1 \quad (55b)$$

$\dot{V}(t)$ se réduit alors à :

$$\dot{V}(t) = - h_1 - a_3 + a_2 x_0(t)^2 \quad x_1(t)^2 \quad (56)$$

qui est bien semi-négative, et pour laquelle les conditions (53) sont suffisantes. La positivité de $V(t)$ pour tout $\underline{x} \neq \underline{0}$ est également obtenue :

$$V(t) = \frac{1}{2} (a_0 + h_0 - a_3 h_1) x_0(t)^2 + x_1(t)^2 + \frac{a_2 h_1}{4} x_0(t)^4 \quad (57)$$

L'observateur est globalement et asymptotiquement stable. Une première simulation (Figure 1) illustre cette démonstration :

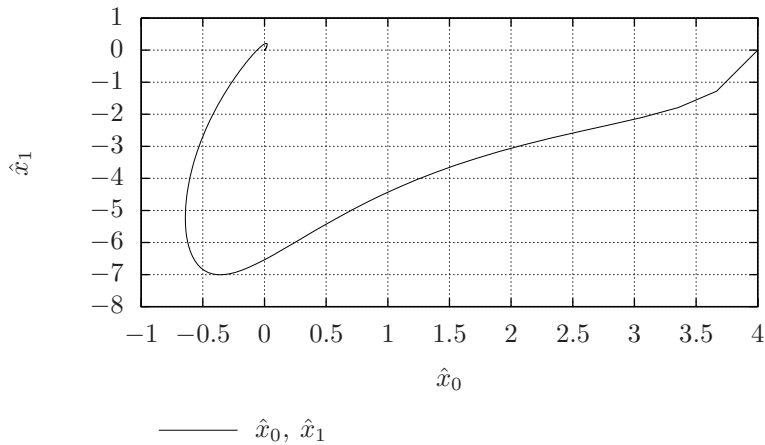


Figure 1. Stabilisation dans l'espace d'état

avec le paramétrage et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, b_0 = 0, \gamma = 2, T_{obs} = 0.25 \text{ s}, h_0 = 31, h_1 = 8 \\ x_0(t) = 0, \hat{x}_0(0) = 4, \hat{x}_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Pour des conditions initiales non nulles, on observe la trajectoire d'état décroissant asymptotiquement vers $\underline{0}$ pour $t \rightarrow \infty$.

Examinons à présent la convergence uniforme de la trajectoire de l'observateur vers celle du système physique (§ 2.2). Insérons (18a), (18b) et (21a), (21b) dans (22b), il vient :

$$Z_0(t) = a_2 h_1 x_0(t)^2 - a_3 h_1 \quad (59a)$$

$$Z_1(t) = a_2 \frac{\Delta \Psi_2(t)}{\Delta x_1(t)} - a_3 \quad (59b)$$

Pour garantir la convergence, on introduit les conditions différentielles suivantes :

$$\dot{I}(\Delta \underline{x}(t)) = \frac{\partial I(\Delta \underline{x}(t))}{\partial \Delta x_0(t)} \quad (60a)$$

$$d \Delta x_0(t) = \Delta x_1(t) \quad (60b)$$

$$\frac{\partial I(\Delta \underline{x}(t))}{\partial \Delta x_0(t)} = Z_0(t) \Delta x_0(t) \quad (60c)$$

$$I(\Delta \underline{x}(t)) = \int_0^{\Delta \tilde{x}_0(t)} Z_0(t) \Delta x_0(t) d \Delta x_0(t) = \frac{Z_0(t)}{2} \Delta x_0(t)^2 \quad (60d)$$

$\dot{V}(t)$ se réduit à :

$$\dot{V}(t) = - h_1 - a_3 + \frac{\Delta \Psi_2(t)}{\Delta x_1(t)} \Delta x_1(t)^2 \quad (61)$$

défini comme semi-négatif (conditions (52b) et (21a)). L'équation de *Liapounoff* est définie positive et s'écrit :

$$V(t) = A_0 - a_3 h_1 + a_2 h_1 x_0(t)^2 \frac{\Delta x_0(t)^2}{2} + \frac{\Delta x_1(t)^2}{2} \quad (62)$$

Une deuxième simulation (Figure 2) permet de vérifier expérimentalement la validité de l'analyse : le système physique oscille selon un cycle limite centré sur $u(t) = 0$. Les paramètres suivants sont modifiés par rapport à (58) :

$$\begin{aligned} T_{obs} = 0.4 \text{ s}, h_0 = 11.5, h_1 = 5 \\ x_0(0) = 1.37, x_1(0) = 0, \hat{x}_0(0) = 0, \hat{x}_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (63)$$



4. Conclusions et perspectives

4.1. Conclusions

Ce nouveau type d'observateur permet la reconstruction de trajectoires d'état stables et exactes vis à vis de celles d'un système physique. Ce résultat a été démontré jusqu'à l'ordre 4 à l'aide de fonctions de *Liapounoff* globalement et asymptotiquement stables (stable in the large). La méthode de calcul pour étendre ces résultats à des systèmes d'ordre plus élevés a été détaillée.

Pour effectuer la synthèse des paramètres de l'observateur, on effectue une approximation à l'ordre un de *Liapounoff* (first order method) de l'observateur. Cette approximation "des petits mouvements" peut dans notre cas être étendue sans risque à l'ensemble de l'espace d'état, en vertu des résultats de l'analyse globale de stabilité. L'équation résultante autorise l'exploitation de la technique des polynômes normaux d'amortissement de *Naslin* pour paramétrer l'observateur. Ce faisant, on dissocie la dynamique de convergence des trajectoires d'état reconstruites de la dynamique du système physique. Ce point est intéressant, car il ouvre la porte à une identification en ligne des paramètres du modèle sans risque de destabilisation de l'observateur.

Il est possible de démontrer que le vecteur d'état de l'observateur est de nature non biaisée, ce qui autorise l'utilisation de cette technique pour la mesure et le contrôle de procédés industriels.

4.2. Perspectives

Une première retombée de ces travaux pourrait concerner l'extension de cet observateur à des systèmes multi-entrée, ou à la modélisation de systèmes mécaniques basés sur des décompositions de *Lure*. En effet, ce type d'applications se retrouve entre autre dans la caractérisation de fluides complexes.

Une deuxième retombée pourrait consister à coupler cette structure observatrice à un algorithme d'identification en ligne, autorisant ainsi l'exploitation de cette structure dans le cadre du contrôle adaptatif des procédés.

5. Bibliographie

- [AJZ 60] AJZERMAN M., « Détermination de la frontière du domaine de stabilité dans l'espace des paramètres », *Automatisme*, vol. 5, n° 10, 1960, p. 381-388.
- [BAS 88] BASTIN G., GEVERS M., « Stable Adaptive Observers for Nonlinear Time-Varying Systems », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, n° 7, 1988, p. 650-658.
- [BES 04] BESANCON G., ZHANG Q., HAMMOURI H., « High gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems », *Symposium on Nonlinear Control Systems, 6th IFAC Symposium, NOLCOS*, 1-3 September 2004.
- [BUL 98] BULLINGER E., ILCHMANN A., ALLGÖWER F., « A simple adaptive observer for nonlinear systems », *Nonlinear control systems design 1998 : a proceedings volume from*

- the 4th IFAC Symposium, NOLCOS*, vol. 2, Ed. by H. J.C. Huijberts, Oxford : Pergamon Press, 1-3 July 1998, p. 781-786.
- [FUL 92] FULLER A., « Guest Editorial. Lyapunov Centenary Issue », *Int. J. Control*, vol. 55, n° 3, 1992, p. 521-527.
- [GAU 81] GAUTHIER J., BORNARD G., « Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, n° 4, 1981, p. 922-926.
- [GIL 88] GILLE J., DECAULNE P., PÉLEGRIN M., *Systèmes asservis non linéaires*, Dunod, 5 ième édition, 1988, isbn 2-04-016955-5.
- [GIS 90] GISSLER J., SCHMID M., *Vom Process zur Regelung. Analyse, Entwurf, Realisierung in der Praxis*, Siemens, first édition, 1990, isbn 3-8009-1551-0.
- [HER 77] HERMANN R., KRENER A., « Nonlinear Controllability and Observability », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, n° 5, 1977, p. 728-740.
- [HUM 70] HUMBERT C., RAGOT J., « Comportement asymptotique des rapports caractéristiques dans l'optimisation quadratique », *Revue A*, vol. 12, 1970, p. 32-34.
- [J.H 02] J.H. STOEJ J. C., « Towards a spline based adaptive nonlinear observer », *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation MED 2002 Lisbon*, 9-12 July 2002.
- [LUE 66] LUENBERGER D., « Observers for multivariable systems », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, n° 2, 1966, p. 190-197.
- [LYA 92] LYAPUNOV A., *The General Problem of Motion Stability*, vol. 17, Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies, 1892, Translated to English 1949.
- [NAS 60] NASLIN P., « Nouveau critère d'amortissement », *Automatisme*, vol. 5, n° 6, 1960, p. 229-236.
- [NAS 63] NASLIN P., « Polynomes normaux et critère algébrique d'amortissement », *Automatisme*, vol. 8, 1963, p. 215-223.
- [NIK 05] NIKIFOROV V., FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B. R., « Adaptive Observer-based Synchronization of Nonlinear Nonpassifiable Systems », rapport n° math.OC/0509650, September 2005, Cornell University Library, Optimization and Control, Dynamical Systems, MSC-class : 37D99.
- [POL 27] DER POL B. V., « Forced Oscillations in Circuits with Nonlinear Resistance », *Philosophical Magazine*, vol. 7, n° 3, 1927, p. 65-80.
- [RAO 05] RAOUFI R., KHALOOZADEH H., « Stochastic/Adaptive Sliding Mode Observer for Noisy Excessive Uncertainties Nonlinear Systems », *5th International Conference on Technology and Automation (ICTA'05)*, 15-16 october 2005, p. 49-54.
- [TOR 92] TORNAMBÈ A., « High-gain observers for non-linear systems », *Int. J. of Systems Science*, vol. 23, n° 9, 1992, p. 1475-1489.