
Joseph Boussinesq (1842-1929) : de Gap à Lille ou de l'élève au savant mécanicien

Pierre-Antoine Bois * & Norbert Verdier **

** Université Lille 1*

Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR 8107)

Boulevard Paul Langevin

59655 Villeneuve d'Ascq Cédex

*** IUT Cachan (Université de Paris-Sud 11)*

09, avenue de la division Leclerc

94 234 CACHAN Cédex

Pierre-Antoine.Bois@univ-lille1.fr ; norbert.verdier@u-psud.fr

Sections de rattachement : 26, 60 & 72

Secteur : Secondaire

RÉSUMÉ.

Formé à l'Université de Montpellier, c'est le hasard qui a conduit à Lille Joseph Boussinesq. À cette époque, la recherche scientifique en France est dirigée essentiellement par les universitaires parisiens, qui, eux-mêmes s'appuient sur des institutions nationales comme l'École polytechnique et l'Académie des Sciences. C'est dire que, sans négliger les contacts locaux qu'il acquerra à Lille (par exemple Auguste Boulanger, l'un de ses successeurs) c'est surtout avec Saint-Venant, professeur à l'École des Ponts et Chaussées que Boussinesq travaillera durant toute sa période lilloise. Cet article fait le point sur les apports lillois de Boussinesq et éclaire grâce à des documents inédits sa relation avec son maître, Saint-Venant.

MOTS-CLÉS : Boussinesq, comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, contraintes statiques, Journal de Liouville, Lille, méthode du potentiel, ondes de surface, Saint-Venant, turbulence.

1. De Gap à Lille : sous l'impulsion de Saint-Venant

Formé à l'université de Montpellier, c'est le hasard qui a conduit à Lille Joseph

Boussinesq. À cette époque, la recherche scientifique en France est dirigée essentiellement par les universitaires parisiens, qui, eux-mêmes s'appuient sur des institutions nationales comme l'École polytechnique et l'Académie des sciences. Créée en 1854, l'université de Lille¹ est encore, en 1872, une nouvelle université. Le corps enseignant est peu nombreux : Boussinesq est nommé en 1872 sur une deuxième chaire, nouvellement créée, de mathématiques. Compte tenu de l'environnement économique régional, ces mathématiques sont des mathématiques appliquées, et Boussinesq est nommé sur une chaire de *Calcul différentiel et intégral*. Sans négliger les contacts locaux qu'il acquerra à Lille (par exemple Auguste Boulanger, l'un de ses successeurs) c'est surtout avec Saint-Venant, professeur à l'École des Ponts et chaussées que Boussinesq travaillera durant toute sa période lilloise.

Saint-Venant a été celui grâce à qui Boussinesq a pu se frayer un chemin pour entrer dans le monde des savants. Un document inédit éclaire particulièrement le rôle joué par Saint-Venant auprès du jeune Boussinesq. Ce document est la correspondance entre Boussinesq et Saint-Venant. Il s'agit d'une correspondance manuscrite déposée à la Bibliothèque de l'Institut de France (Boussinesq, MS 4221-4229). Nous en avons joint un extrait dans nos annexes. D'autres éléments avec leur analyse figurent dans notre étude à paraître (Verdier 2009). Ces lettres sont précieuses pour comprendre les questionnements d'un jeune professeur d'un collège de province à propos de ses publications et de sa carrière. Saint-Venant – déplorant la rareté des « lecteurs attentifs des œuvres des autres » (Boussinesq, BIF, MS 42 26, Lettre du 22 mars 1868, Feuilles 9 & 10) – répond point par point aux diverses sollicitations du jeune homme, qu'elles relèvent des sciences – mécaniques en l'occurrence – ou des stratégies éditoriales ou administratives voire de questionnements d'ordre religieux. Il agit en ami et en mentor. Offrant au jeune savant des points d'entrée dans un milieu académique et parisien très fermé.

Les années lilloises marquent, pour Boussinesq, le passage d'un état obscur à la notoriété. Jeune chercheur lorsqu'il arrive à Lille, il y met en évidence aussi bien son immense palette qu'une maîtrise indiscutée de son art. Il y acquerra une reconnaissance nationale, et comprendra aussi qu'il doit viser plus haut, pour exprimer son talent, qu'une université encore jeune. Il serait bien difficile de suivre dans le détail son parcours scientifique, tellement large est la thématique de son œuvre. Pour une analyse plus complète, nous renvoyons aux études que nous avons consacrées à l'œuvre de Boussinesq (Bois 2007a & b). Les titres de ses publications suffisent à illustrer ces côtés de son personnage, y compris des travaux à

¹ Pour avoir des informations sur l'histoire de l'université de Lille nous renvoyons à « Histoire des mathématiques à Lille ».

Cf. http://asa3.univ-lille1.fr/spip/ASA_histoire/mathematiques/mathematiques.htm

connotation philosophique (Boussinesq 1878a).

Analysant de manière très serrée des travaux expérimentaux qui, à cette époque sont dans tous les domaines extrêmement nombreux, Boussinesq recherche la représentation des phénomènes physiques par des équations mathématiques. Ces travaux sont analysés avec la plus grande minutie : c'est le cas, par exemple, des travaux de Rankine (1856) ou de Bazin (1865). En revanche ce n'est pas lui qui initialisera un domaine à défricher : il sera toujours un *modélisateur*.

2. Quelques travaux marquants réalisés à Lille

a. *Le problème des contraintes statiques dans les sols.*

Sans cesse encouragé par Saint-Venant, Boussinesq se lance dans des problèmes de mécanique des sols. Il s'agit d'évaluer les efforts dans un milieu pulvérulent (dont la description cinématique et dynamique tient partiellement du milieu fluide et du milieu solide) en vue d'applications au génie civil (Boussinesq 1876). Saint-Venant voudrait voir améliorer des résultats qu'avait obtenus en 1856 l'Écossais William Rankine (1820-1872), et qu'il trouve un peu restrictifs. Boussinesq part, pour modéliser le milieu, d'une description élastique dans laquelle il introduit une (petite) correction « pulvérulente ». Cette correction consiste essentiellement à introduire dans la loi de comportement des coefficients de Lamé dépendant de la pression dans le sol. Rankine n'avait obtenu des équations valables que lorsque le milieu était à la limite de la rupture (par exemple un tas de sable dont la pression nulle sur la face externe entraîne l'éboulement). Boussinesq obtient, à l'aide de sa « correction », des solutions au problème du tas de sable en position arbitraire par rapport au cas-limite qu'avait envisagé Rankine. Mieux, il a la surprise de voir apparaître un deuxième cas de rupture, par excès de pression, correspondant à un écrasement du massif. On voit immédiatement les applications de ce problème au génie civil : les résultats font l'objet de plusieurs publications (Gatignol 2007). Le nom de Boussinesq commence à être largement connu.

b. *Une première approche de la turbulence.*

Il s'agit là d'un des premiers problèmes d'hydrodynamique qui ont frappé Boussinesq. Celui-ci s'intéresse aux fluides depuis qu'il est à Gap. Afin de mieux comprendre les questions posées, rappelons qu'en 1868 l'énoncé des équations de Navier-Stokes, qui date de 1845, n'est vieux que d'une vingtaine d'années. En l'absence d'expérimentation suffisamment décisive, ces équations sont encore controversées : jusqu'aux expériences de Couette (1890), leur seule validation est l'expérience de Poiseuille, qui, elle-même, ne valide Navier-Stokes que pour des écoulements assez lents. Averti des résultats expérimentaux obtenus par Darcy (1857) puis Bazin (1865), Boussinesq avait tenté en 1868 une description de la loi contrainte-déformation

dépendant de l'agitation tourbillonnaire dans le milieu : en fait, il pense que la description de Navier-Stokes est peut-être incomplète, ou bien qu'il manque dans ses formules des termes qui n'apparaîtraient que dans les écoulements suffisamment rapides. Il réitère en 1878 (Boussinesq 1878b), mais sa contribution, qui ignore encore les travaux de Reynolds (1883), a surtout le mérite « *d'avoir reconnu le problème de base* » : elle prépare plutôt la contribution qu'il fera en 1897 en formulant « *l'hypothèse de Boussinesq* » sur la fermeture des équations turbulentes, beaucoup plus solide et beaucoup plus fructueuse.

c. ***Les ondes de surface et l'« équation de Boussinesq ».***

Ce problème concerne au départ les ondes de surface dans les canaux observées en 1834 par l'Anglais J.S. Russell. Celui-ci a décrit en particulier cette onde de longueur d'onde infinie que l'on commence à appeler « onde solitaire ». Stokes, Airy, Kelvin ont vainement tenté d'apporter une solution théorique à ce problème.

Un des premiers problèmes auxquels s'attaque Boussinesq après sa thèse est l'explication de ce phénomène. Combinant à la fois l'influence de la faible amplitude des ondes observées et celle de la faible hauteur du canal par rapport à son extension horizontale, il obtient une équation (appelée aujourd'hui « *équation de Boussinesq* ») que l'on peut écrire

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} = \alpha u_{xxx} + \beta (u^2)_{xx} ,$$

où u désigne la dénivellation verticale de la surface libre et x l'abscisse horizontale le long du canal. Dans ce travail, Boussinesq ne se contente pas d'établir l'équation : il en donne des solutions, et en particulier l'une d'elles qui correspond effectivement à l'onde solitaire (Boussinesq 1877). Boussinesq montre aussi que cette même équation (1) est également celle des vibrations longitudinales des barres élastiques. Presque vingt ans plus tard (1895) les Hollandais Korteweg et De Vries découvriront l'« *équation de Korteweg-de Vries* », qui décrit approximativement une onde simple associée à l'équation de Boussinesq. Les deux paramètres en interférence sont alors l'amplitude des vibrations et l'épaisseur de la barre comparée à sa longueur.

En s'attaquant au problème des ondes de surface en eau peu profonde, Boussinesq vient de préciser la méthode scientifique qui, de plus en plus, va guider l'essentiel de ses découvertes : par une intuition qui s'appuie sur la lecture de données expérimentales (parfois sommaires, voir plus haut), il a extrait des équations des phénomènes qu'il étudie les paramètres gouvernant le comportement des solutions que donne l'expérience et il met en évidence des cas singuliers où plusieurs de ces paramètres entrent en compétition. Ignorant les travaux de William Froude (1810-1879) sur la similitude qui sont alors tout juste en cours de publication, Boussinesq n'a pas justifié formellement son équation. Pour que son analyse soit

complète au sens actuel, il y manque encore la notion de « temps lent » qui devrait y figurer. En ce sens, on peut dire qu'il est un des précurseurs de l'*analyse dimensionnelle* et de la *modélisation asymptotique*.

d. ***L'équation BBO.***

Toujours intrigué par les comportements visqueux, Boussinesq s'attaque ensuite à un problème déjà considéré par Stokes, mais que celui-ci n'avait résolu que dans le cas stationnaire : le mouvement d'un corps solide au sein d'un fluide visqueux au repos. Il s'agit d'estimer les efforts autour du corps dus à la non-uniformité du mouvement. Boussinesq publie à ce propos une modeste note à l'Académie des Sciences (Boussinesq 1885a), dans laquelle il propose une formule basée sur l'approximation de Stokes, mais à laquelle, selon son habitude, il a ajouté un terme correctif. Cette formule sera retrouvée trois ans plus tard par Basset (1888), et la force observée par Boussinesq et Basset sera appelée par les Britanniques « *force de Basset* ». Beaucoup plus tard (1910) le Suédois Carl Oseen (1879-1944) donnera un troisième énoncé de l'équation, cohérent avec l'« *approximation d'Oseen* », que lui-même avait formée afin de résoudre le paradoxe de Stokes. Cette équation, qui gouverne le mouvement des particules flottant dans l'air, est finalement connue sous le nom d'« *équation BBO* ». Elle réapparaîtra régulièrement dans les préoccupations des hydrauliciens et elle donne, aujourd'hui encore, matière à de nombreux travaux scientifiques (Gatignol 2007).

e. ***La méthode du potentiel, le « problème de Boussinesq » et les vibrations des barres.***

Cette « méthode du potentiel » représente d'une certaine manière, un point d'orgue pour les travaux lillois de Boussinesq. Il recherche tout d'abord dans les équations qu'il a établies antérieurement des potentiels ϕ (ce qui n'est pas tellement difficile à trouver : par exemple la fonction de contraintes d'un solide en état de torsion statique en est un), et il propose une méthode de calcul de la solution d'un problème gouverné par l'équation $\Delta\phi = 0$, dans le cas où ϕ est à symétrie sphérique et à valeur imposée dans un petit domaine entourant la singularité. Intégrant cette solution lorsque la source parcourt un domaine tridimensionnel avec une intensité variable, il établit une formule générale : en vocabulaire moderne, il vient de réaliser une convolution.

Après sa solution de l'équation de Laplace, Boussinesq s'aperçoit que celle-ci n'est peut-être pas la seule à laquelle s'applique sa méthode. Il considère alors successivement l'équation biharmonique $\Delta\Delta\phi = 0$, puis l'équation $(\Delta)^n \phi = 0$, puis l'équation $\phi_{tttt} = -\phi_v$. Ces équations se rencontrent dans de nombreux problèmes d'élasticité, mais aussi de Mécanique des fluides. Le plus célèbre des problèmes qu'il résout ainsi reste toutefois le problème « du poinçon » (champ des contraintes dans un massif solide occupant un demi-espace bordé par

une surface plane, lorsque une masse de Dirac est appliquée en un point de la surface) connu aujourd'hui sous le nom de « *problème de Boussinesq* ».

Tous ces résultats sont publiés dans un mémoire (Boussinesq 1885b) qui reflète très bien la manière de travailler de son auteur. Boussinesq est alors dans la plénitude de ses moyens. Il livre tout d'abord, pour l'annonce et la crédibilité de son travail, une collection (parfois assez copieuse) de notes à l'Académie des Sciences. Celles-ci préparent le lecteur au travail définitif. Il publie ensuite un mémoire qui se présente souvent comme un « pavé » (pour le présent problème : 722 pages) dans lequel il expose non seulement le détail du travail, mais aussi le cheminement de sa réflexion, et celle-ci digresse assez souvent sur des sujets qu'il voudrait annexes, mais qui se révèlent souvent, au fil de la lecture, beaucoup moins annexes que ne le voudrait l'auteur. Cette monographie est son premier travail d'importance sur l'élasticité (ce n'est pas le dernier).

Le solde des années lilloises

L'équation BBO et les solutions potentielles sont les derniers travaux scientifiques lillois de Boussinesq : il est élu, en effet, le 18 janvier 1886, membre de l'Académie des sciences et cette élection, suivant la règle de l'époque, lui impose d'habiter Paris. Boussinesq cherche donc une mutation, qu'il obtient cette même année 1886 : il est nommé *Professeur de mécanique physique et expérimentale à la faculté des Sciences de Paris*.

Pour tracer un bilan des découvertes lilloises de Boussinesq, on peut dire que deux d'entre elles ont eu une influence majeure sur la mécanique et la science en général : tout d'abord la *modélisation des ondes de surface* et l'*équation de Boussinesq*, qui a pu donner à ses successeurs l'idée d'en rechercher les fondements théoriques. L'autre est celle des *méthodes potentielles*, qui a été à l'origine lointaine de la recherche de solutions d'équations linéaires à l'aide de solutions ponctuelles puis de convolutions. Dans ces deux cas l'idée de Boussinesq a considérablement dépassé le simple domaine des applications à la mécanique.

Les auteurs de cet article seraient intéressés si la communauté scientifique (et pourquoi pas à Lille ?) pouvait créer un Fonds Boussinesq rassemblant une bibliographie ainsi que des lettres, documents, etc., de ce savant. Ils prêteraient main forte à ce projet dans les moyens qui sont les leurs.

Bibliographie

Bois, P.A., « Joseph Boussinesq (1842-1929). Universitaire lillois et Académicien », Pub. Irma. Lille 2007a, vol. 67, n° III, 1-35.

Bois, P.A. (rédacteur en chef invité), Joseph Boussinesq, a Scientist of bygone days and present times, Comptes Rendus Mécanique, T. 35, fascicule 9-10, Septembre - octobre 2007b.

Boussinesq, J., « Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion », Mémoires présentés à l'Académie royale des sciences de Belgique, 2, 40, 1876, F. Hayez, Bruxelles.

Boussinesq, J., « Essai sur la théorie des eaux courantes », Mémoires des savants étrangers, série 2, 23, 1877 (660 pages) ; 24, 1877.

Boussinesq J., Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale, Gauthier-Villars, Paris, 1878a.

Boussinesq J., « Compléments à une étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes » et à un mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides », Journal de mathématiques pures et appliquées, série 3, 4, 1878b, p. 335-376.

Boussinesq, J., « Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini au repos au mouvement varié d'une sphère solide », Comptes rendus de l'Académie des sciences, 100, 1885a, p. 935-937.

Boussinesq, J., Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Gauthier-Villars, Paris, 1885b.

Gatignol, R., « On the history term of Boussinesq-Basset when the viscous fluid slips on the particle », Comptes rendus Mécanique, 335, 2007, p. 606-616.

Verdier, N. Le Journal de Liouville et la presse de son temps : des entreprises d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885), thèse de doctorat de l'université Paris-Sud 11, 2009.

Annexe : un extrait de la correspondance entre Boussinesq et Saint-Venant

Lettre du 22 mars 1868 : de Saint-Venant à Boussinesq

« Cher monsieur. Avant mon départ de Paris, qui a eu lieu le 12 (et oui je serai encore depuis le 1^{er} jusqu'au 22 juin) votre épreuve était arrivée ; je pense qu'on imprime. Vous savez que vous avez droit à 25 exemplaires à part, et on vous les enverra à Gap par le chemin de fer si vous le demandez à M.Gauthier Villars. Je pourrai m'informer, le mois prochain, si votre mémoire a paru bon et opportun, non pas de manière que vos vues soient approuvées de tout le monde, ce qui serait difficile car chacun a sa manière d'envisager la question, mais tout au moins de manière que la continuation de la publication de vos recherches soit jugée intéressante, en sorte que M. Liouville soit disposé à les insérer dans son journal. Sans attendre ce jugement là, qui ne sera peut-être pas porté par beaucoup de personnes (car chacun a ses affaires, et les lecteurs attentifs des œuvres des autres sont rares) vous pourriez toujours adresser à M. Liouville de nouveaux mémoires, en le remerciant d'avoir inséré le premier ; il est bienveillant et large, en sorte qu'il y a quelque lieu d'espérer qu'il les accueillera. Seulement, il partira peut-être au milieu de juin pour la Lorraine où il resterait jusqu'après les vacances, et cette circonstance ajourne souvent les impressions car, avant son départ, il classe ordinairement la matière pour composer plusieurs cahiers. Avant de faire votre envoi, voudriez-vous, et à plusieurs reprises, revoir vos travaux ? C'est un conseil que vous a donné, je crois, M. Briot, et qui convient surtout à ceux qui, comme vous, ont une grande imagination. Ne vous a-t-il pas renvoyé à plusieurs reprises votre thèse, et ne vous arrivait-il pas de lui faire subir, outre les modifications indiquées, d'autres modifications sans compter des additions qu'il vous engageait ensuite à modifier elles-mêmes ? M. Briot a pour vous et pour vos travaux une grande estime mais pense que ceux-ci ne peuvent que gagner à être mûri et quelquefois émoulsés [*sic*]. A dieu ne plaise, au reste, que ces quelques paroles de ma part tendent à arrêter l'essor de votre esprit d'invention. M. Briot m'a dit (ou à peu près) que les annales de l'école normale n'avaient pas assez d'étendus ou étaient pourvues depuis quelque temps de trop de matière pour vous donner la possibilité d'une insertion prochaine. Cependant si vous avez quelque article court et saillant (tel que votre ellipsoïde en 14 pages),

comme vous ne reculez pas devant la besogne, vous pourriez en adresser une copie à ces annales et une copie à M. Liouville. M. Briot m'a dit que vous étiez bien capable d'être nommé pour une Faculté, [?] peut-être, à la première ou aux premières places vacantes pour lesquelles il y a, déjà, presque la désignation. Que cela ne vous empêche pas d'espérer et de travailler. Peut-être un autre jour, pourrai je vous dire quelque chose de plus positif et de moins vague. » [Boussinesq, BIF, MS 42 26, lettre du 22 mars 1868, feuilles 9 & 10]

Lettre du 29 mars 1868 : de Boussinesq à Saint-Venant :

« Je ne vous demande pas une réponse immédiate ; mais je vous prie de joindre ce conseil aux choses que vous pourriez avoir à me dire relativement à l'accueil que trouvera mon mémoire auprès des lecteurs du journal de mathématiques. Conformément à vos bons avis, j'ai revu avec soin mes deux mémoires intitulés : théorie nouvelle des ondes lumineuses [Comptes rendus de l'Académie des sciences, **65** (1867), 235-239 & *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II, **13** (1868), 313-339 & 425-438]; étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux biréfringents [*Journal de mathématiques pures et appliquées*, II, **13** (1868), 340-371]. Je vais en faire une autre copie, que je reverrai encore, et j'espère pouvoir l'envoyer à Monsieur Liouville dans sept ou huit jours. Quant à mon travail sur les rôles comparés de l'ellipsoïde principal et de celui des conductibilités linéaires dans la théorie de la chaleur, je pense que je n'aurais à y faire que des modifications insignifiantes : je demanderai donc à Monsieur Briot, qui l'a dans les mains, si les annales de l'École Normale pourrait l'insérer d'ici à trois, quatre ou cinq mois. Dans le cas contraire, je prierais Monsieur Briot de le faire remettre à Monsieur Liouville. J'aurais encore trois ou quatre autres mémoires moins considérables, écrits depuis longtemps , et en état d'être publiés ; notamment : la théorie de l'écoulement des liquides dans les tubes de très petite section normale ; un travail où j'arrive très simplement aux lois des ondes liquides périodiques propagées, à partir d'un centre d'ébranlement [?], soit dans un canal de largeur et de profondeur constante, indéfini latéralement ; un autre sur l'action capillaire et sur ses effets dans le mouvement d'une nappe liquide. Mais le point le plus intéressant du premier a déjà paru aux comptes-rendus de l'Académie des sciences (tome LXV, page 46), et je désire attendre un peu pour les deux autres ; car, bien que je pense être le premier à traiter ces questions au point de vue où je me suis placé, je veux m'en assurer tout-à-fait avant de les faire paraître. » [Boussinesq, Bibliothèque de l'Institut de France, MS 42 26, lettre du 29 mars 1868, feuilles 11 & 12].

Lettre du 07 mai 1868 : de Saint-Venant à Boussinesq

« Vous recevrez, sur bandes, deux épreuves de votre Mémoire, à la suite desquelles sur des épreuves de la note que je mets après , et où je présente votre méthode en d'autres termes, en ce qui regarde l'établissement des formules. Comme M. Liouville a désiré que les épreuves paraissent par ma main, parce que, dit-il le jeune auteur ne saura pas faire la correction d'une manière claire ce qui cause des retards, je me suis permis de faire quelques corrections. Sur l'une de vos deux épreuves. Mais vous n'êtes point obligé de la répéter sur l'autre épreuve. Si vous préférez corriger autrement, et d'ailleurs je n'ai pas lu tout. C'est sur cette 2^e épreuve, où je n'ai pas fait de correction , que vous aurez, après avoir corrigé, à mettre en tête de chaque feuille votre bon à tirer. Si les corrections sont assez peu nombreuses ou assez faciles pour que vous puissiez vous reposer de leur exécution sur ces messieurs de l'imprimerie. Vous pourrez garder l'autre épreuve (celle où j'ai fait la correction sur votre partie). Et vous adresser directement à m. Gauthier-Villars imprimeur rue de Seine n °10. Si les corrections sont nombreuses et si leur exécution vous inspire la crainte d'inexactitude, vous pouvez écrire en tête : une autre épreuve à envoyer à .Boussinesq, à Gap. Mais une note de l'imprimerie me sollicite d'envoyer le bon à tirer. [Boussinesq, BIF, MS 42 26, lettre du 7 mai 1868, feuilles 5 & 6].

[...]

